ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ
ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ, ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/νση : Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη : 15180 – Μαρούσι
Πληροφορίες : Α. Τσακανίκα, Ε. Παναγιωτοπούλου
Ιστοσελίδα : http://www.minedu.gov.gr
Email : deae1@minedu.gov.gr
Τηλέφωνο : 210 3442190, 3797,2577

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθμός Προτεραιότητας:

Μαρούσι, 03/10/2023
Αρ. πρωτ.: 110573/Δ3

ΠΡΟΣ :

1)ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΕΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ & ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
2) ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
3) ΣΥΜΒΟΥΛΟΥΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΝΤΑΞΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
(μέσω των Δ.Δ.Ε.)
4) ΛΥΚΕΙΑ Ε.Α.Ε.
(μέσω των Δ.Δ.Ε.)

ΚΟΙΝ.
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
info@iep.edu.gr

Θέμα: «Οδηγίες για τη διδασκαλία και τη διαχείριση της ύλης των Μαθηματικών της Β' και Γ' τάξης Προσανατολισμού και της Γ΄ τάξης Γενικής παιδείας του Λυκείου Ε.Α.Ε. για το σχολικό έτος 2023-2024».

Σχετ.: Το υπό στοιχεία 108887/Δ3/29-09-2022 εισερχόμενο έγγραφο του Υ.ΠΑΙ.Θ.Α.

Σε συνέχεια των σχετικών εισηγήσεων του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Πράξεις 60/28-09-2023 και 57/07-09-2023 του Δ.Σ), σας αποστέλλουμε για το σχ. έτος 2023-2024:

- την ύλη και τις οδηγίες διδασκαλίας των **των Μαθηματικών της Β' και Γ' τάξης Προσανατολισμού και της Γ΄ τάξης Γενικής παιδείας του Λυκείου Ε.Α.Ε.**
- τις οδηγίες διαφοροποίησης της διδασκαλίας στα μαθήματα των Λυκείων Ε.Α.Ε.

Συν.: Τέσσερα (04) ηλεκτρονικά αρχεία

Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.

Ο ΠΡΟΪΣΤΑΜΕΝΟΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ Δ/ΝΣΗΣ ΣΠΟΥΔΩΝ Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ

ΑΚΡΙΒΕΣ ΑΝΤΙΓΡΑΦΟ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΤΣΑΧΑΛΑΣ

Evgenia Panagiotopoulou
05.10.2023 09:25:37

<u>Εσωτερική Διανομή</u>:

- Γραφείο Υπουργού
- Γραφείο Υφυπουργού κας Δ-Μ Μιχαηλίδου
- Γραφείο Γενικού Γραμματέα Π/θμιας, Δ/θμιας Εκπ/σης & Ειδικής Αγωγής
- Γενική Διεύθυνση Σπουδών Π/θμιας και Δ/θμιας Εκπ/σης
- Διεύθυνση Σπουδών Προγραμ. κ Οργάνωσης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης- Τμήμα Α΄
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής & Εκπ/σης Τμήμα Α΄
- Δ/νση Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας και Καινοτομίας

ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΪΗΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Α. Βασικές κατευθύνσεις που είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας

Κατά την εκπαιδευτική και μαθησιακή διαδικασία, προκειμένου να διασφαλιστεί η πρόσβαση στο περιεχόμενο της διδασκαλίας και η ισότιμη ενεργός συμμετοχή όλων των μαθητών/τριών, κρίνεται σκόπιμη η διαφοροποιημένη προσέγγιση της διδασκαλίας. Ειδικότερα, λαμβάνοντας υπόψη το διαφορετικό ατομικό προφίλ, τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών της τάξης, θα πρέπει να γίνονται οι απαραίτητες εύλογες προσαρμογές: α) του περιεχομένου της διδασκαλίας, β) της διαδικασίας με έμφαση στην οργάνωση της τάξης και των ποικίλων τρόπων εργασίας (ομάδα, δυάδα, ολομέλεια, ατομικά, ευέλικτη ομαδοποίηση, κ.τ.ό.), τη χρήση πολυαισθητηριακών μεθόδων διδασκαλίας και ποικιλίας διδακτικών εργαλείων αλλά και του κατάλληλου προσβάσιμου εκπαιδευτικού υλικού, καθώς και στην αξιοποίηση των αποτελεσματικότερων κατά περίπτωση και συνθήκη στρατηγικών διαφοροποίησης, και γ) του μαθησιακού αποτελέσματος μέσω ποικίλων και διαφορετικών τρόπων έκφρασης και αξιολόγησης αυτών. Οι στρατηγικές, οι πρακτικές και οι διαδικασίες διαφοροποίησης με συγκεκριμένα παραδείγματα παρέχονται μέσω του υποστηρικτικού υλικού που παρατίθεται στη συνέχεια (Βλέπε Β. Υποστηρικτικό υλικό).

Για τις εν λόγω διαφοροποιήσεις λαμβάνονται υπόψη αφενός το ατομικό μαθησιακό προφίλ του/της κάθε μαθητή/τριας, όπως αυτό προκύπτει από την εκπαιδευτική αξιολόγηση ολιστικού χαρακτήρα (αρχική, διαμορφωτική μέσω αναστοχαστικής διαδικασίας και τελική) και αφετέρου το σύνολο των μαθητών/τριών της τάξης και το πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία. Η εκπαιδευτική αξιολόγηση διεξάγεται από τις/τους εκπαιδευτικούς της τάξης και σε συνεργασία με το Ειδικό Εκπαιδευτικό Προσωπικό (Ε.Ε.Π.) ή και το Ειδικό Βοηθητικό Προσωπικό (Ε.Β.Π.), στην περίπτωση των σχολικών μονάδων που υποστηρίζονται από αυτό, συνεκτιμώντας το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο του/της μαθητή/τριας, τα βιώματα και τις εμπειρίες, τις πληροφορίες που συλλέγονται από τους γονείς/κηδεμόνες ή και άλλους θεραπευτές ή ειδικούς που εμπλέκονται στην εκπαίδευση και φροντίδα του/της μαθητή/τριας. Επίσης, είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη η γνωμάτευση του οικείου Κέντρου Διεπιστημονικής Αξιολόγησης, Συμβουλευτικής και Υποστήριξης (ΚΕ.Δ.Α.Σ.Υ.) ή αναγνωρισμένου δημόσιου Ιατροπαιδαγωγικού Κέντρου ή, ελλείψει των προαναφερθεισών περιπτώσεων γνωμάτευσης, το ενδεχόμενο πόρισμα της αρμόδιας Επιτροπής Διεπιστημονικής Υποστήριξης (Ε.Δ.Υ.) Για την υποστήριξη της αξιολογικής διαδικασίας των μαθητών/τριών παρέχονται στη συνέχεια, ενδεικτικά, οδηγοί εκπαιδευτικών και μια ποικιλία εναλλακτικών τρόπων, μέσων και εργαλείων αξιολόγησης (βλέπε Β. Υποστηρικτικό υλικό).

Επιπροσθέτως, στο πλαίσιο της διδασκαλίας διερευνώνται και λαμβάνονται υπόψη οι δυνατότητες των μαθητών/τριών, τα ενδιαφέροντά τους, τα ταλέντα τους και οι κλίσεις τους καθώς και οι ατομικοί ρυθμοί ανταπόκρισής τους προκειμένου να παρέχεται ο χρόνος που απαιτείται για κάθε μαθητή/τρια, να διασφαλίζεται η ενεργός εμπλοκή τους και να εκφράζεται το δυναμικό τους στον μέγιστο δυνατό βαθμό. Βασικός στόχος της διδασκαλίας με βάση τις αρχές του καθολικού σχεδιασμού για τη μάθηση αποτελεί ο εκ των προτέρων σχεδιασμός της διδασκαλίας, ώστε να διασφαλίζει την ισότιμη συμμετοχή όλων των μαθητών/τριών της τάξης επιτρέποντας πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης/περιεχομένου διδασκαλίας, πολλαπλούς τρόπους έκφρασης και εμπλοκής και όχι οι εκ των υστέρων προσαρμογές των δραστηριοτήτων ή των διδακτικών πρακτικών που σχεδιάστηκαν στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Ως εκ τούτου, κρίνεται σκόπιμο να λαμβάνονται υπόψη κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων: α) η εννοιολογική πλαισίωσή τους, ώστε να διασφαλίζεται πως το περιεχόμενο γίνεται κατανοητό αξιοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία, γνώση και βιώματα των μαθητών/τριών, β) το επικοινωνιακό κίνητρο, αν δηλαδή υπάρχει κίνητρο, ενδιαφέρον για επικοινωνία από τους ίδιους τους μαθητές και τις ίδιες τις μαθήτριες, (εξετάζεται αν οι δραστηριότητες συνδέονται με τα ενδιαφέροντά τους και τις δυνατότητές τους), γ) ο πολυαισθητηριακός χαρακτήρας των δραστηριοτήτων, αξιοποιώντας πολλαπλούς και εναλλακτικούς τρόπους έκφρασης, δράσης, επικοινωνίας και εργασίας, δ) η δυνατότητα διαφορετικών κινητικών επιλογών, εναλλαγή κίνησης και στατικότητας στις δράσεις ανάλογα με το πλαίσιο της τάξης (βλέπε Β. υποστηρικτικό υλικό).

Επίσης, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει, εκ των προτέρων, να έχουν συμβουλευθεί το Εξατομικευμένο Πρόγραμμα Εκπαίδευσης (Ε.Π.Ε.), το οποίο συνοδεύει την εκάστοτε γνωμάτευση και στο οποίο *μπορεί να περιλαμβάνονται και οι ειδικές ρυθμίσεις, διευθετήσεις ή αναγκαίες εύλογες προσαρμογές, ανάλογα με τις εκπαιδευτικές ανάγκες, για την απρόσκοπτη συμμετοχή των μαθητών/τριών στην εκπαιδευτική διαδικασία, στις κάθε είδους εξετάσεις των σχολικών μονάδων της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και στις εισαγωγικές εξετάσεις στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, όπως η παροχή περισσότερου χρόνου, η χρήση υποστηρικτικών τεχνολογιών και η παροχή των θεμάτων σε προσβάσιμη μορφή* (άρθρο 5, παρ. 4, ν. 3699/2008, Α’ 199).

Το Ε.Π.Ε. των μαθητών/τριών, σύμφωνα και με τα διεθνή πρότυπα και δεδομένα, θα πρέπει να σχεδιάζεται διεπιστημονικά και συνεργατικά από το ΚΕ.Δ.Α.Σ.Υ. ή την Ε.Δ.Υ. με τους/τις εκπαιδευτικούς της τάξης (στην περίπτωση που εμπλέκονται πολλοί εκπαιδευτικοί ή πολλές ειδικότητες ορίζεται από κοινού ένας/μία συντονιστής/τρια) ή και το Ε.Ε.Π. και το Ε.Β.Π. (στις περιπτώσεις των σχολείων που στελεχώνονται με Ε.Ε.Π. και Ε.Β.Π.), τους γονείς, τους ειδικούς επιστήμονες που ενδεχομένως υποστηρίζουν τον/την μαθητή/τρια και εκτός σχολείου, τον/τη διευθυντή/ρια του σχολείου (θα πρέπει να μεριμνά, οι μαθητές/τριες που φοιτούν στο σχολείο να ακολουθούν το ατομικό τους πρόγραμμα και να τους παρέχεται η αναγκαία υποστήριξη για τη συνολική ανάπτυξή τους) με τη συμμετοχή και των ίδιων των μαθητών/τριών στον βαθμό που είναι εφικτό.

Ως προς το περιεχόμενο του Ε.Π.Ε., προτείνεται να περιλαμβάνει: α) στοιχεία μαθητή, γονέων και συμμετεχόντων στη σύνταξη του Ε.Ε.Π., β) ημερομηνίες συναντήσεων, γ) την παρούσα κατάσταση του/της μαθητή/τριας σε όλους τους τομείς ανάπτυξης (αυτοεξυπηρέτηση, κοινωνικοσυναισθηματικό, κινητικό, γνωστικό, γλωσσικό) συμπεριλαμβανομένης και της προϋπάρχουσας γνώσης στα διαφορετικά μαθησιακά/γνωστικά αντικείμενα, όπως προκύπτει από την αξιολογική διαδικασία, δ) το μαθησιακό προφίλ του/της μαθητή/τριας-στυλ μάθησης, τις δυνατότητές τους, τα ενδιαφέροντα και τα ταλέντα τους, ε) τις αξιολογικές διαδικασίες (μέσα και τρόποι αξιολόγησης), στ) μακροπρόθεσμους και βραχυπρόθεσμους στόχους ανά τομέα ανάπτυξης και γνωστικό αντικείμενο με ημερομηνία έναρξης και κατάκτησης αυτών, ζ) το προτεινόμενο εκπαιδευτικό πλαίσιο, τους τομείς εκπαιδευτικών προτεραιοτήτων και τις προτεινόμενες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις και προσαρμογές, η) τις αναγκαίες πρόσθετες υπηρεσίες ειδικής αγωγής και επιπρόσθετα υποστηρικτικά μέσα, τεχνολογίες και πόρους (ανθρώπινοι και υλικοί) εντός και εκτός σχολείου και ενδεικτική διάρκειά τους, θ) το ενδεχόμενο πρόγραμμα μετάβασης του/της μαθητή/τριας σε άλλο εκπαιδευτικό ή κοινωνικό πλαίσιο, ι) την ημερομηνία που τίθεται σε ισχύ και τις ημερομηνίες επαναξιολόγησής του για ανασχεδιασμό, κατόπιν αναστοχαστικής αξιολόγησης της ατομικής προόδου του/της μαθητή/τριας, αλλά και των εκπαιδευτικών παρεμβάσεων και πρακτικών που υλοποιήθηκαν κατά τη διδασκαλία. Προτείνεται, επίσης, οι εκπαιδευτικοί να ενημερώνονται για το ιατρικό ιστορικό του/της μαθητή/τριας που ενδέχεται να επηρεάζει τη μαθησιακή του/της πορεία. Το Ε.Π.Ε. αποτελεί εμπιστευτικό έγγραφο.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας προτείνονται συνεργατικά μοντέλα διδασκαλίας. Ειδικότερα, κρίνεται απαραίτητη η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών της τάξης και του σχολείου καθώς και με το Ε.Ε.Π. και Ε.Β.Π., αλλά και μεταξύ του σχολείου και της οικογένειας και άλλων υποστηρικτικών φορέων της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Κατά τη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται σε επίπεδο σχεδιασμού της διδασκαλίας, εφαρμογής και αξιολόγησης. Οι ρόλοι τους είναι ισότιμοι και είναι σημαντικό να μην παραπέμπουν σε ένα μοντέλο «ηγέτη-βοηθού». Σε περίπτωση συνδιδασκαλίας υιοθετείται το καταλληλότερο μοντέλο συνδιδασκαλίας ανάλογα με το προφίλ των μαθητών/τριών της τάξης (βλέπε Β. Υποστηρικτικό υλικό).

Β. Υποστηρικτικό υλικό

Βάσει των ανωτέρω, για το σχεδιασμό της διδασκαλίας και γενικότερα την υποστήριξη του εκπαιδευτικού έργου προτείνεται η αξιοποίηση του προσβάσιμου εκπαιδευτικού υλικού και των προσαρμοσμένων σχολικών εγχειριδίων που έχουν αναπτυχθεί από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (διατίθενται και έντυπα στο σχολείο κατόπιν παραγγελίας από το ΙΤΥΕ_ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ κάνοντας χρήση των κωδικών του σχολείου) καθώς και των οδηγών εκπαιδευτικού για την εκπαίδευση μαθητών/τριών με αναπηρία, των οδηγών διαφοροποίησης της διδασκαλίας για κάθε αναπηρία, των λογισμικών και των καλών πρακτικών που είναι δωρεάν διαθέσιμα στην ιστοσελίδα του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής http://www.prosvasimo.iep.edu.gr/el/ . Επιπροσθέτως, προσφέρονται δωρεάν και ανοιχτά διαδικτυακά μαθήματα για την εκπαίδευση μαθητών/τριών με αναπηρία μέσω της ηλεκτρονικής πλατφόρμας του ΙΕΠ iepx (https://iepx.iep.edu.gr)

Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να συμβουλεύονται ή και να αξιοποιούν κατά τον σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδασκαλίας τους και το κάτωθι υποστηρικτικό υλικό:

1. Οδηγοί διαφοροποίησης της διδασκαλίας και στρατηγικές διαφοροποίησης για κάθε αναπηρία με συγκεκριμένα παραδείγματα https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/odhgoi-diaforopoihshs-159
2. Οδηγοί διαφοροποίησης ανά βαθμίδα εκπαίδευσης http://iep.edu.gr/images/IEP/EPISTIMONIKI_YPIRESIA/Epist_Monades/A_Kyklos/Special_Education/2020/Odigos_diaf_Gymnasio.pdf
3. Οδηγοί εκπαιδευτικών για την εκπαίδευση μαθητών/τριών με αναπηρία και διαδικτυακές εφαρμογές https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/vivlia-eidikhs-agwghs-2020
4. Προσαρμογές αναλυτικών προγραμμάτων για την εκπαίδευση μαθητών/τριών με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/ekpaideush-mathitwn-me-eidikes-mathisiakes-duskolies
5. Αναλυτικά Προγράμματα ΕΑΕ

https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/analytika-programmata-eidikhs-agwghs-kai-ekpaideushs

6. Εργαλεία, μέσα και διαδικασίες αξιολόγησης του μαθητή και της μαθήτριας https://prosvasimo.iep.edu.gr/Books/2021/Moutavelis.Π3.10.1.platforma21.9.2021.pdf
7. Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές και εκπαιδευτική αξιολόγηση μαθητών/τριών με μαθησιακές δυσκολίες
   https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/ekpaideush-mathitwn-me-eidikes-mathisiakes-duskolies
8. Οδηγοί αξιολόγησης των μαθητών/τριών ανά βαθμίδα εκπαίδευσης
   http://iep.edu.gr/el/deltia-typou-genika/odigos-ekpaideftikoy-gia-tin-perigrafiki-aksiologisi-sto-gymnasio
9. Κοινωνικές Ιστορίες
   https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/koinwnikes-istories
10. Βιβλία αμβλυώπων
    http://www.prosvasimo.iep.edu.gr/el/paradotea/vivlia-gia-amvlywpes-mathites-eisagwgh
    http://ebooks.edu.gr/ebooks/
11. Πολυμεσικό υλικό
    http://www.prosvasimo.iep.edu.gr/el/polimesiko-uliko-prosarmosmena-sxolika-vivlia/ekpaideutiko-logismiko
12. Εικονολεξικό
    http://prosvasimo.iep.edu.gr/el/eikonolexiko
13. Ψηφιακή βιβλιοθήκη
    http://prosvasimo.iep.edu.gr/el/polimesiko-uliko-prosarmosmena-sxolika-vivlia/multimedia-library
14. On line λεξικό εννοιών
    http://prosvasimo.iep.edu.gr/el/polimesiko-uliko-prosarmosmena-sxolika-vivlia/onlne-lexiko-ennoiwn
15. Μοντέλα συνδιδασκαλίας
    http://www.prosvasimo.iep.edu.gr/el/odhgos-ekpaideutikou-gia-thn-euaisthitopoihsh-se-themata-apodoxhs-ths-anaphrias-kai-ths-diaforetikothtas-kai-thn-anapyksh-entaksiakhs-koultouras-sto-sxoleio
    http://prosvasimo.iep.edu.gr/docs/pdf/Epimorfwsh_2017/%CE%A3%CE%A5%CE%9B%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%A3%20%CE%A4%CE%9F%CE%9C%CE%9F%CE%A3.pdf
16. Συλλογή καλών Πρακτικών
    https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/kales-praktikes-syllogh
17. Παραδείγματα υποδειγματικών διδασκαλιών
    https://prosvasimo.iep.edu.gr/el/ypodeigmatikes-didaskalies
18. Υλικό για την παράλληλη στήριξη
    http://www.prosvasimo.iep.edu.gr/el/epimorfwtiko-yliko-2017
    http://prosvasimo.iep.edu.gr/docs/pdf/Epimorfwsh_2017/%CE%A3%CE%A5%CE%9B%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%A3%20%CE%A4%CE%9F%CE%9C%CE%9F%CE%A3.pdf

19. Υλικό για την εκπαίδευση παιδιών προσφύγων http://iep.edu.gr/el/component/k2/content/50-ekpaidefsi-prosfygon

ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2023–2024

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Όσον αφορά στις προτεινόμενες δραστηριότητες, επαφίεται στην κρίση του/της διδάσκοντα/-σκουσας η επιλογή εκείνων που θα εφαρμόσει στην τάξη. Ωστόσο, προτείνεται να εμπλουτιστεί το μάθημα με το συγκεκριμένο υλικό.

Στο πλαίσιο του διδακτικού σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να αξιοποιήσουν τις προτεινόμενες **ιστοσελίδες** από το διδακτικό υλικό ή/και τα διδακτικά βιβλία, να προβαίνουν σε επανέλεγχο της εγκυρότητάς τους, διότι ενδέχεται λόγω του δυναμικού τους χαρακτήρα ορισμένες από αυτές να είναι ανενεργές ή να οδηγούν σε διαφορετικό περιεχόμενο.

Κεφάλαιο 1ο

(Προτείνεται να διατεθούν 24 διδακτικές ώρες).

Στην τάξη αυτή οι μαθητές/-ήτριες θα ασχοληθούν με τις έννοιες και τον λογισμό των διανυσμάτων. Αυτά αποτελούν απαραίτητες γνώσεις προκειμένου να γίνει κατανοητή η θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που ακολουθεί, καθώς και η αντιμετώπιση πολλών καταστάσεων της πραγματικής ζωής και προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των διανυσμάτων

Το διάνυσμα αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που δομήθηκε από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής.

Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Σε κάθε περίπτωση, η σύνδεση των αλγεβρικών ή άλλων συμβολικών εκφράσεων με το αντίστοιχο σχήμα έχει κεντρική σημασία στην κατανόηση των εννοιών και των διαδικασιών. Προτείνεται λοιπόν, όποτε είναι δυνατόν, η συζήτηση των εννοιών, των ιδιοτήτων και των ασκήσεων να γίνεται σε άμεση αναφορά με το σχήμα και όχι μόνο στην αφηρημένη αλγεβρική μορφή τους.

Τα διανύσματα (όπως και οι εξισώσεις γραμμών) αξιοποιούνται στην απόδειξη προτάσεων και Θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

§ 1.1 , 1.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 και 4 ώρες αντίστοιχα

Το διάνυσμα εισάγεται ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, όπου Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

§ 1.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης παραλληλίας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ $(\vec{\beta}\neq\vec{0})$ για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων.

Επειδή αρκετοί/ές μαθητές/-ήτριες αντιλαμβάνονται τον τύπο $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ ως διαίρεση διανύσματος με αριθμό, καλό είναι να τονισθεί ότι η γραφή αυτή είναι μία σύμβαση και στην πραγματικότητα το 2ο μέλος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Προτείνεται να γίνουν ασκήσεις μόνο από την Α΄ ομάδα.

§ 1.4 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Προτείνεται να τονισθεί επίσης η μοναδικότητα της έκφρασης διανύσματος με τις συντεταγμένες του. Η έννοια των διανυσμάτων είναι σημαντική στη γεωμετρία εάν αναλογιστεί κανείς ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Για αυτόν τον λόγο προτείνεται να δοθεί έμφαση στη σύνδεση των εννοιών και διαδικασιών που περιέχονται στις προηγούμενες παραγράφους με την αναλυτική (αλγεβρική) έκφρασή τους, με άμεση όμως αναφορά στη γεωμετρική έκφραση, όπου είναι δυνατόν.

§1.5 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Η πράξη του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων αφενός συνδέεται με έννοιες της Φυσικής, αφετέρου παρέχει επιπλέον εργαλεία ελέγχου της καθετότητας, της παραλληλίας κλπ. Ωστόσο, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μια πράξη με αρκετές ιδιότητες με τις οποίες οι μαθήτριες/-ητές δεν είναι εξοικειωμένες/οι: το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων δεν είναι διάνυσμα, το γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να είναι μηδέν ενώ κανένα από τα διανύσματα δεν είναι μηδενικό, δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, κ.α. Προτείνεται να συζητηθούν αναλυτικά αυτά τα χαρακτηριστικά, με αφορμή τόσο τους ορισμούς όσο και τις ασκήσεις.

Προτείνεται να μη γίνουν οι Γενικές Ασκήσεις αλλά να αξιοποιηθούν οι ερωτήσεις κατανόησης (ενδεικτικά οι 5, 6, 7, 10, 11, 12) για την ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών/-ητριών στην τάξη (διερεύνηση, συζήτηση, επιχειρηματολογία).

Προτεινόμενες Δραστηριότητες

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές δραστηριότητες που μπορούν να υλοποιηθούν στην τάξη με την εμπλοκή των μαθητών/-ητριών. Η πρώτη δραστηριότητα συνδέει τα Μαθηματικά με τη Φυσική. Η δεύτερη δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στον/στην μαθητή/-ήτρια να συνδέει, διατυπώνει και αποδεικνύει προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τον διανυσματικό λογισμό, αλλά να ακολουθεί και την αντίστροφη πορεία. Τέλος, η τρίτη δραστηριότητα[1] αναφέρεται σε ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, όπου οι μαθητές/-ήτριες μοντελοποιούν το πρόβλημα με χρήση των διανυσμάτων και απαντούν στο τέλος με τη φυσική γλώσσα. Αν και είναι αυτονόητο, επισημαίνεται ότι αν ένα πρόβλημα απαιτεί τύπους ή σχέσεις από άλλο επιστημονικό πεδίο, αυτά δίνονται στους/στις μαθητές/-ήτριες.

Δραστηριότητα 1

Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $F_P = 20N$ και σχηματίζει γωνία θ^o με το οριζόντιο έδαφος. Το βαγονάκι σύρεται 100m κατά μήκος του εδάφους.

α) Να υπολογίστε το έργο της δύναμης όταν η γωνία είναι 30^o.

β) Επιλέξτε δύο άλλες τιμές για τη γωνία θ^o και υπολογίστε το έργο σε κάθε περίπτωση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μπορείτε να διατυπώσετε κάποια εικασία;

ΣΧΟΛΙΟ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα στοχεύει να συνδέσει τα μαθηματικά με τη φυσική και εφαρμογές του πραγματικού κόσμου. Εστιάζει στο γεγονός ότι το έργο δεν είναι τίποτα άλλο, παρά το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών. Της δύναμης και της μετατόπισης.

Δραστηριότητα 2

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$.

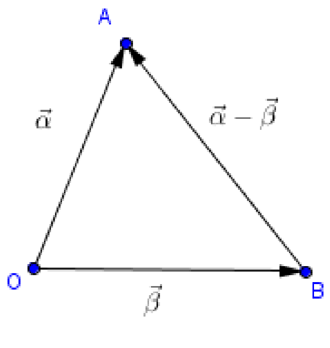
Να εξετάσετε αν η συγκεκριμένη σχέση ικανοποιείται για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το προηγούμενο συμπέρασμά σας.

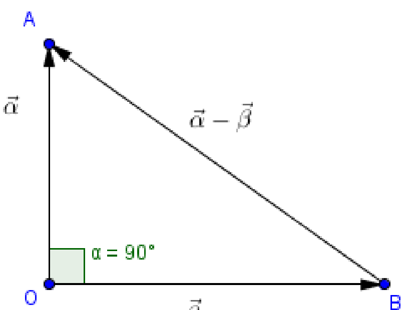
Ενδεικτική λύση

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα συνδέει το διανυσματικό λογισμό με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο πρώτο ερώτημα αναμένεται, οι μαθητές/-ήτριες να εφαρμόσουν τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και εργαζόμενοι, κυρίως αλγεβρικά, να καταλήξουν ότι η συγκεκριμένη σχέση ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι κάθετα.

Με το δεύτερο ερώτημα επιχειρείται να οπτικοποιήσουν οι μαθητές/-ήτριες τη δοθείσα σχέση. Έτσι, με σημείο αναφοράς το Ο θα κατασκευάζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, οπότε θα είναι $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Οι μαθητές/-ήτριες, στη συνέχεια, αναμένεται να ερμηνεύσουν τα μέτρα των διανυσμάτων ως μήκη



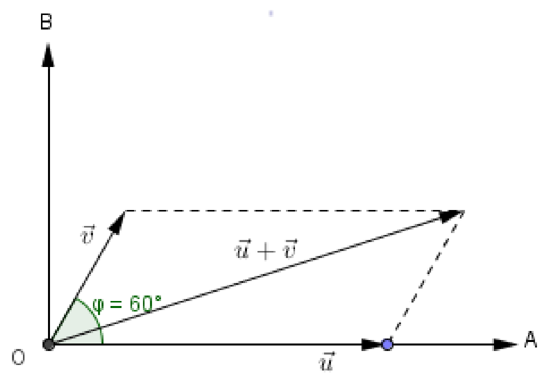
ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε τη σχέση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2$ θα τη γράψουν στη μορφή: $(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2$, για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ισχύει, αν και μόνο αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, δηλαδή αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

<u>Δραστηριότητα 3</u>

Ένα αεροσκάφος που πετά προς ανατολάς με ταχύτητα 500 km/h απουσία ανέμου, συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h, που πνέει σε κατεύθυνση 60^0 ανατολική-βορειονατολική (οι κατευθύνσεις ορίζουν γωνία η οποία μετριέται από την πρώτη κατεύθυνση δηλ. την ανατολική, προς τη δεύτερη κατεύθυνση, δηλ τη βορειοανατολική). Το αεροπλάνο διατηρεί τον προσανατολισμό του προς ανατολάς, ωστόσο λόγω του ανέμου, η ταχύτητα του ως προς το έδαφος αποκτά νέο μέτρο και κατεύθυνση. Βρείτε τη νέα κατεύθυνση του αεροσκάφους.

Ενδεικτική λύση

Έστω $\vec{u}$ η ταχύτητα του αεροσκάφους πριν την επίδραση του ανέμου και $\vec{v}$ η ταχύτητα του ανέμου. Τότε έχουμε: $|\vec{u}|$=500 και $|\vec{v}|$= 70. Ζητείται το μέτρο και η φορά της συνισταμένης $\vec{u}+\vec{v}$. Υποθέτουμε ότι ο θετικός ημιάξονας των x δείχνει προς την Ανατολή και ο θετικός ημιάξονας των y προς τον Βορρά. Στο σύστημα αυτό το διάνυσμα $\vec{u}$ = (500, 0) και το



$\vec{v}=\left(70\sigma\upsilon\nu 60^0,\ 70\eta\mu 60^0\right)=\left(35,\ 35\sqrt{3}\right)$. Επομένως, $\vec{u}+\vec{v}=\left(535,\ 35\sqrt{3}\right)$ και συνεπώς

$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{535^2+\left(35\sqrt{3}\right)^2}\approx 538,4$.

Επιπλέον, για τη γωνία θ που σχηματίζει η κατεύθυνση του αεροσκάφους με την ανατολική κατεύθυνση ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{35\sqrt{3}}{535}$ που αντιστοιχεί σε γωνία 6,5°.

Απάντηση: Η νέα ταχύτητα του αεροσκάφους θα είναι περίπου 538,4 km/h, ενώ η νέα πορεία του είναι περίπου $6,5^0$ ανατολική-βορειοανατολική.

Β΄ τρόπος

Μπορούμε να υπολογίσουμε το $|\vec{u}+\vec{v}|$ με χρήση του εσωτερικού τετραγώνου και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{u}+\vec{v}$ με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Κεφάλαιο 2ο
(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

Εισαγωγή

Κατά τη φοίτηση τους στο Γυμνάσιο, οι μαθητές/-ήτριες έχουν έλθει ήδη σε επαφή με έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στη Β΄ Λυκείου σκοπεύουμε σε περαιτέρω εμβάθυνση θεμελιωδών ζητημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια. Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης (κλίσης) μιας ευθείας, με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης της ευθείας, η γενική της μορφή, καθώς και το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο. Με τη διδασκαλία αυτής της ενότητας επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, καθώς και να κατανοήσουν τις δυνατότητες που παρέχει ως μαθηματικό εργαλείο στη διερεύνηση και απόδειξη προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και σε περιοχές άλλων επιστημών.

§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες.

Προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να εκφρασθεί ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας και στο ότι δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. Να τονισθεί επίσης, ότι από το σημείο $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ διέρχονται οι ευθείες με εξισώσεις: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ και $x = x_0$.

§2.2 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Να δοθεί έμφαση όχι μόνο στη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας, αλλά και στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των συντελεστών της εξίσωσης και των συντεταγμένων του διανύσματος που είναι παράλληλο ή κάθετο προς την ευθεία. Στην παράγραφο αυτή προτείνεται να συζητηθεί μια απόδειξη της διαδικασίας επίλυσης του γραμμικού συστήματος 2×2 με τη μέθοδο των οριζουσών, σε συνδυασμό με τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο. Επειδή δεν περιέχεται το σχετικό θέμα στο σχολικό βιβλίο, προτείνεται η παρακάτω διδακτική πορεία.

Ας είναι

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 \cdot x_1 + \mathrm{B}_1 \cdot y_1 + \Gamma_1 = 0 \ \text{ με } \mathrm{A}_1 \neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_1 \neq 0 \\ \mathrm{A}_2 \cdot x_1 + \mathrm{B}_2 \cdot y_1 + \Gamma_2 = 0 \ \text{ με } \mathrm{A}_2 \neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_2 \neq 0 \end{cases}$$

οι εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 στο επίπεδο αντίστοιχα.

Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 \cdot x_1 + \mathrm{B}_1 \cdot y_1 = -\Gamma_1 \ \text{ με } \mathrm{A}_1 \neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_1 \neq 0 \\ \\ \mathrm{A}_2 \cdot x_1 + \mathrm{B}_2 \cdot y_1 = -\Gamma_2 \ \text{ με } \mathrm{A}_2 \neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_2 \neq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Τότε λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή αλλιώς ένα γραμμικό σύστημα (2×2).

Τα διανύσματα $\vec{\eta}_1 = (\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$ και $\vec{\eta}_2 = (\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2)$ είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Επομένως, θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$, η $\det(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = \begin{vmatrix} A_1 & \mathrm{B}_1 \\ A_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix}$, επειδή σχηματίζεται από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος (1), ονομάζεται ορίζουσα του συστήματος και συμβολίζεται με D, δηλαδή $D = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα $\vec{\eta}_1 = (\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$ και $\vec{\eta}_2 = (\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε ισοδύναμα

$$\det(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & \mathrm{B}_1 \\ A_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0 \quad (2)$$

Επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Αν $D = 0$, τότε ισοδύναμα τα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά και επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D = 0$, τότε το σύστημα (1) είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα.

Εναλλακτική προσέγγιση

Αντί των καθέτων διανυσμάτων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (\mathrm{B}_1, -\mathrm{A}_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (\mathrm{B}_2, -\mathrm{A}_2)$ που είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Τότε τα διανύσματα θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (\mathrm{B}_1, -\mathrm{A}_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (\mathrm{B}_2, -\mathrm{A}_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε

$$\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathrm{B}_1 & -A_1 \\ \mathrm{B}_2 & -A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -\mathrm{B}_1 A_2 + A_1 \mathrm{B}_2 \neq 0$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και $D = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (2). Η συγκεκριμένη ορίζουσα που αποτελείται από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, λέγεται ορίζουσα του συστήματος. Η σχέση (2) σημαίνει ισοδύναμα ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα, τότε

$$\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} B_1 & -A_1 \\ B_2 & -A_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -B_1A_2 + A_1A_2 = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$ είναι παράλληλα, τότε και οι αντίστοιχες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D = 0$, τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις.

ΣΧΟΛΙΟ

Προαιρετικά ο/η διδάσκων/-σκουσα θα μπορούσε, με τη βοήθεια των οριζουσών, να προχωρήσει στη διερεύνηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή συμπίπτουν.

Για παράδειγμα: Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν έναν τουλάχιστον από τους άξονες. Έστω ότι τέμνουν τον $y'y$. Τότε, η ε_1 τον τέμνει στο σημείο με τεταγμένη $-\frac{\Gamma_1}{B_1}$ και η ε_2 στο σημείο με τεταγμένη $-\frac{\Gamma_2}{B_2}$. Στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες ε_1 και ε_2 :

Συμπίπτουν αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{B_1} = \frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 = B_1 \Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 - B_1 \Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_x = 0$$

όπου $D_x = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix}$. Η ορίζουσα D_x προκύπτει από την ορίζουσα D, αν η στήλη των συντελεστών του x αντικατασταθεί από τους σταθερούς όρους του συστήματος (1). Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η ορίζουσα $D_y = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$, για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι $D_y = 0$. Να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει συντελεστής αγνώστου διαφορετικός από το μηδέν.

Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{B_1} \neq \frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 \neq B_1 \Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 - B_1 \Gamma_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D_x \neq 0$$

Συμπερασματικά:

ΟΡΙΖΟΥΣΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ	ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

[1] Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει αλιευθεί από το βιβλίο: *THOMAS Απειροστικός λογισμός, Τόμος ΙΙ των Finney, Weir & Giordano*, σελ. 697, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2011.

$D \neq 0$	Οι ευθείες τέμνονται (μοναδικό κοινό σημείο)	Μοναδική λύση $x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$
$D = 0$	Οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή Οι ευθείες συμπίπτουν (άπειρα κοινά σημεία)	Αδύνατο ή Άπειρες λύσεις

Προτείνεται να δοθεί έμφαση με απλά αριθμητικά παραδείγματα ότι στην περίπτωση όπου οι συντελεστές $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1$ δεν είναι μηδέν η συνθήκη $\mathrm{D} = \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 = 0$ δηλώνει ότι οι συντελεστές είναι ανάλογοι και οι ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, ενώ οι ορίζουσες $\mathrm{D}_\mathrm{x}, \mathrm{D}_\mathrm{y}$ καθορίζουν αν η αναλογία ισχύει και για τους συντελεστές Γ_1, Γ_2, οπότε οι ευθείες ταυτίζονται, ή δεν ισχύει οπότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Για τον σκοπό αυτό μπορούν να αξιοποιηθούν οι ασκήσεις 5, 6 της Α' Ομάδας και 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας της παραγράφου 1.1 του βιβλίου της Άλγεβρας.
Προτείνεται επίσης να διδαχθούν ασκήσεις παραμετρικών συστημάτων από το βιβλίο της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου υπό το πρίσμα της σχετικής θέσης δύο ευθειών.
Η διδακτική πορεία που θα επιλεγεί δεν θα είναι στην εξεταστέα ύλη. Οι μαθητές/-ήτριες όμως πρέπει να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν σε ασκήσεις τα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα.

§2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Πριν δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου, οι μαθητές/-ήτριες να επεξεργαστούν δραστηριότητες, όπως οι παρακάτω δύο:

1η: Δίνονται η ευθεία και το σημείο Α(5, 2). Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε .
ii) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της ζ με την ε.
iii) Η απόσταση του Α από την ε.

Στη συνέχεια, να συζητηθεί ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, ο οποίος και να δοθεί.

2η: Δίνονται τα σημεία Α(5, 2), Β(2, 3) και Γ(3, 4). Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ .
ii) Το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ και
iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια, να συζητηθεί ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τριγώνου του οποίου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών.

Β) Να μη γίνουν:

- Η άσκηση 7 της Β΄ Ομάδας.
- Από τις Γενικές Ασκήσεις οι 3, 4, 5, 6 και 7.

Προτεινόμενες Δραστηριότητες σε όλο το κεφάλαιο

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με την εμπλοκή των μαθητών/-ητριών.

Δραστηριότητα 1

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα

		Κλίση ευθείας	**Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος**	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$	$\omega=30^0$			
	$\omega=60^0$			
	$\omega=150^0$			
Διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία	$\vec{\delta}=\left(3,\sqrt{3}\right)$			
	$\vec{\delta}=\left(-1,-\sqrt{3}\right)$			
	$\vec{\delta}=\left(-3,\sqrt{3}\right)$			
Σημεία της ευθείας	$\left(0,1\right)$ **και** $\left(\sqrt{3},2\right)$			
	$\left(1,\sqrt{3}-1\right)$ **και** $\left(\sqrt{3},2\right)$			
	$\left(0,2\right)$ **και** $\left(-\sqrt{3},3\right)$			

Οι μαθήτριες/-ητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά και να συνδέσουν έτσι την κλίση της ευθείας, τον συντελεστή διεύθυνσης του παράλληλου διανύσματος και το πηλίκο διαφορών $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των τριών μεγεθών ταυτίζονται και κατά συνέπεια εκφράζουν την ίδια μαθηματική έννοια.

Δραστηριότητα 2

Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)x+\left(1+\sqrt{3}\right)y=8 \quad (\varepsilon_1)$$
$$x+\sqrt{3}y=1 \quad (\varepsilon_2)$$

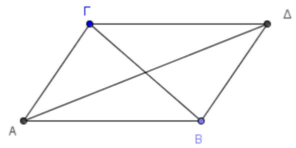
α) Να προσδιορίσετε δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ που να είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα και να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες μεταξύ τους.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.

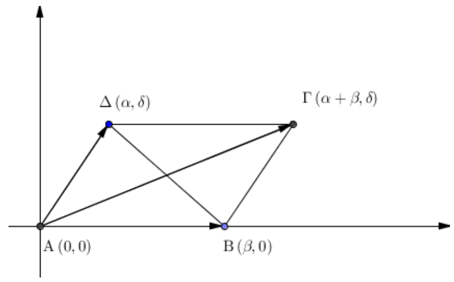
Δραστηριότητα 3 (Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με άλγεβρα)

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.



Ενδεικτική λύση

Το ζητούμενο αποτελεί μία από τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Αυτό που θέλουμε όμως τώρα, είναι να την αποδείξουμε με χρήση της άλγεβρας. Επιλέγουμε λοιπόν ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Η καταλληλότητα έχει να κάνει με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων αγνώστων. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε το διπλανό σχήμα με τους άξονες. Θεωρώντας το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$ ως αρχή των αξόνων, το σημείο $\mathrm{B}(\beta,0)$ και το σημείο $\Delta(\alpha,\delta)$. Τότε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(\alpha+\beta,\,\delta)$, οπότε το σημείο Γ έχει τις ίδιες συντεταγμένες. Άμεσα προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του μέσου του τμήματος ΑΓ είναι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$ όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του μέσου του ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.



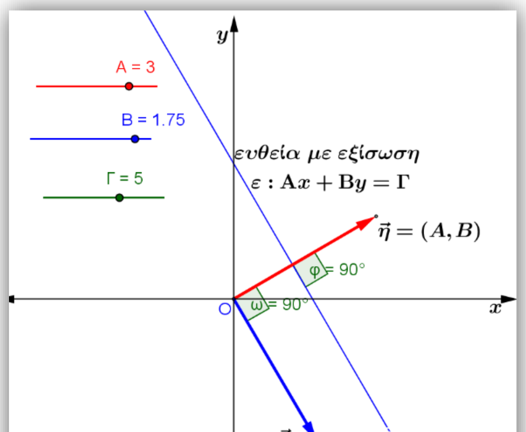
Δραστηριότητα 4

Με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra να επιλέξετε τρεις δρομείς Α, Β, Γ και να παραστήσετε γραφικά τα διανύσματα $\vec{\eta}=(\mathrm{A},\mathrm{B})$ και $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$, καθώς και την ευθεία ε με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\Gamma$. Να υπολογίσετε επιπλέον το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\eta}$ και $\vec{\delta}$, καθώς και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\eta}$ με την ευθεία ε και, στη συνέχεια, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

Ποια είναι η σχέση των διανυσμάτων $\vec{\eta}$ και $\vec{\delta}$, τόσο μεταξύ τους, όσο και με την ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε το Α ή το Β;

Πώς κινείται η ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε μόνο το Α ή μόνο το Β ή μόνο το Γ; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό ενεργοποιείστε το ίχνος της ευθείας ε και μεταβάλλετε διαδοχικά τους δρομείς Α, Β, Γ, αφού προηγουμένως διατηρήσετε στην επιφάνεια εργασίας μόνο την ευθεία και τους δρομείς και αποκρύψετε όλα τα υπόλοιπα (βλέπε παρακάτω σχήμα).

Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό σας.



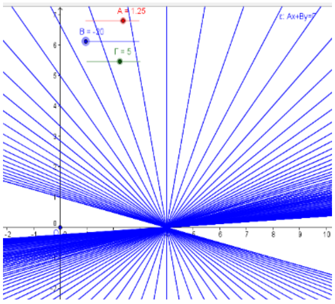
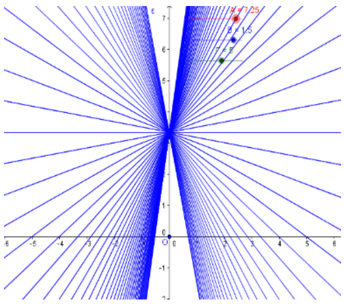
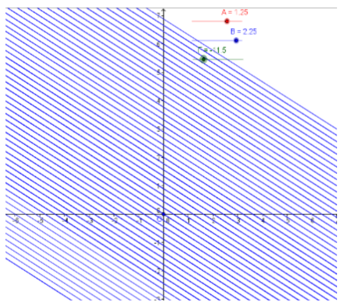
Δραστηριότητα 5

Δίνεται η παρακάτω οικογένεια γραμμικών εξισώσεων:

$$\varepsilon_\lambda : \left(\lambda^2 - \lambda\right) \cdot x - \lambda \cdot y = \lambda^2 - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Με το λογισμικό geogebra επιλέξτε ένα δρομέα λ που να παίρνει τιμές από – 20 έως 20 με αύξηση 0,2 και παριστάνετε γραφικά την ε_λ.

i) Μετακινήστε τον δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και απαντήστε στο ερώτημα: «Τι παριστάνει η ε_λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \neq 0$ και τί για $\lambda = 0$;» Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

ii) Πάρτε δύο τιμές του λ, για παράδειγμα λ = 1, λ = 2, παριστάνετε γραφικά τις ε_1 και ε_2, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Α και επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

iii) Ενεργοποιήστε το ίχνος της ε_λ, μετακινήστε τον δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και ελέγξτε αν οι ε_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται όλες από το σημείο Α. Επαληθεύσατε την εικασία σας αλγεβρικά.

Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 28 διδακτικές ώρες)

Η μελέτη των κωνικών τομών αποτελεί μια φυσιολογική διδακτική εξέλιξη μετά τη μελέτη της ευθείας, που εκφράζεται με εξίσωση πρώτου βαθμού, αφού η αναλυτική τους έκφραση αντιστοιχεί σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου προτείνεται, να δοθεί έμφαση στα παρακάτω σημεία:

- Κάθε κωνική τομή είναι γεωμετρικός τόπος σημείων του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν συγκεκριμένη κάθε φορά ιδιότητα.
- Ο τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής.
- Οι ιδιότητες των κωνικών τομών έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Από τις γενικές ασκήσεις του 3ου Κεφαλαίου δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στις παραγράφους 3.2, 3.3. 3.4 (Παραβολή, Έλλειψη και Υπερβολή).

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 10 ώρες
Να γίνει υπενθύμιση των βασικών ιδιοτήτων του κύκλου που έχουν γνωρίσει οι μαθητές/-ήτριες κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προτείνεται για την εύρεση της εξίσωσης του κύκλου να μην δοθεί έμφαση μόνο στην εφαρμογή του τύπου, αλλά και στην εύρεσή της με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Από τις ασκήσεις της Β' Ομάδας προτείνεται να συζητηθούν μόνο οι 6, 7 και 10.

§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες
Α) Πριν αποδειχθεί ο τύπος της εξίσωσης της παραβολής, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης παραβολής της οποίας δίνεται η εστία και η διευθετούσα. Για παράδειγμα, της παραβολής με εστία το σημείο Ε(1, 0) και διευθετούσα την ευθεία δ: x = – 1. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/-ήτριες έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.
Β) Να μην αναλωθεί διδακτικός χρόνος σε ασκήσεις που απαιτούν υπερβολικά πολλές πράξεις. Από τις ασκήσεις της Β' Ομάδας προτείνεται να συζητηθούν μόνο οι 1, 2 και 3.

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες
Α) Πριν αποδειχθεί ο τύπος της εξίσωσης της έλλειψης, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης έλλειψης της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α. Για παράδειγμα, της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(– 4, 0), Ε(4, 0) και 2α = 10. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/-ήτριες έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης
Β) Να μην αναλωθεί διδακτικός χρόνος σε ασκήσεις που απαιτούνται υπερβολικά πολλές πράξεις. Να μη συζητηθούν ασκήσεις της Β' Ομάδας.

§3.4 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες
Α) Πριν αποδειχθεί ο τύπος της εξίσωσης της υπερβολής, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης υπερβολής της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α. Για παράδειγμα, της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε΄(– 4, 0), Ε(4, 0) και 2α = 10. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/-ήτριες έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.
Β) Να μην αναλωθεί διδακτικός χρόνος σε ασκήσεις που απαιτούνται υπερβολικά πολλές πράξεις. Από τις ασκήσεις της Β' Ομάδας προτείνεται να συζητηθεί μόνο η 4 και μόνο για την υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

§3.5 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες
Από την παράγραφο αυτή θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής». Έτσι, οι μαθητές/-ήτριες θα γνωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής τομής. Προτείνεται η επίλυση απλών ασκήσεων, όπως είναι η άσκηση 4 της Α΄ ομάδας.

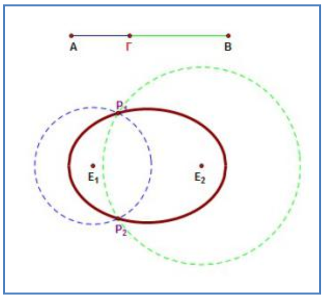
Προτεινόμενη δραστηριότητα
α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα που ακολουθεί με το αντίστοιχό του στη δεύτερη στήλη:

Εξίσωση	Κωνική τομή
$9x^2 - y^2 = 0$	Έλλειψη
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$	Υπερβολή
$y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	Παραβολή
$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$	Ζεύγος ευθειών
$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$	Κύκλος

β. Όμοια για τον πίνακα:

Εκκεντρότητα	Κωνική τομή
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Κύκλος
0	Ισοσκελής υπερβολή
$\frac{4}{5}$	Υπερβολή
$\frac{5}{4}$	Έλλειψη
$\sqrt{2}$	

<u>Ενδεικτική ψηφιακή δραστηριότητα</u>:



Η έννοια της έλλειψης προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη δραστηριότητα «Κατασκευή έλλειψης» από το Φωτόδεντρο. Με τη βοήθεια των οδηγιών και του λογισμικού, οι μαθητές/-ήτριες κατασκευάζουν τον γεωμετρικό τόπο ενός σημείου που το άθροισμα των αποστάσεών του από δύο σταθερά σημεία, είναι σταθερό. Μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά τη θέση των σταθερών σημείων, το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων του τρίτου σημείου από αυτά και να παρατηρούν κάθε φορά τη μεταβολή στον γεωμετρικό τόπο.

http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/6873

ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2023–2024

Για το σχολικό έτος 2023-2024 η ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου περιλαμβάνει τη θεματική της Ανάλυσης της οποίας η διδασκαλία καταλαμβάνει 6 ώρες την εβδομάδα. Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίας επιτρέπουν την υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα:
α) την σύνδεση της Ανάλυσης με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα.
β) την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/-τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά ανεξάρτητα από τη μέχρι τώρα μαθησιακή πορεία τους.

Η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρει μια επιπλέον νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Για την εμπλοκή των μαθητών/-τριών σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης και επίλυσης προβλήματος κρίνεται σκόπιμη καταρχάς η αξιοποίηση προβλημάτων από το υπάρχον διδακτικό υλικό (διδακτικό βιβλίο, υλικό και βιβλία αναρτημένα στο http://ebooks.edu.gr). Έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων να παρέχεται επαρκής χρόνος στους μαθητές/-ήτριες και να αντιμετωπίζονται τυχόν γνωστικές ελλείψεις.

Η αντιμετώπιση γνωστικών ελλείψεων ορισμένων μαθητών/-ητριών μπορεί να γίνεται με την ανάδειξη ενδομαθηματικών συνδέσεων εννοιών και διαδικασιών καθώς και την ανάκληση προηγούμενων γνώσεων. Αυτά αποτελούν σημαντικές ευκαιρίες αφενός επανασύνδεσης μαθητών/-ητριών που κινδυνεύουν να χάσουν την επαφή με τα Μαθηματικά και αφετέρου βαθύτερης κατανόησης για όλους. Τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται κατά την κρίση του/της διδάσκοντα/-ουσας, είτε ως θεωρητική συζήτηση (στις αρχικές παραγράφους συναρτήσεων, μονοτονίας, ακροτάτων κ.α.), είτε ως παρεμβολή των αναγκαίων θεωρητικών στοιχείων για μια άσκηση.

Παράγραφος	**Ελάχιστος αριθμός ωρών**	**Παράγραφος**	**Ελάχιστος αριθμός ωρών**	**Παράγραφος**	**Ελάχιστος αριθμός ωρών**
1.1	3	2.1	8	3.1	4
1.2	10	2.2	4	3.4	5
1.3	10	2.3	5	3.5	7
1.4	3	2.4	5	3.7	10
1.5	6	2.5	4		
1.6	4	2.6	7		
1.7	4	2.7	12		
1.8	12	2.8	4		
		2.9	4		

		2.10	5		

Κεφάλαιο 1ο

§1.1

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους/στις μαθητές/-ήτριες. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ' υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους/στις μαθητές/-ήτριες να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

§1.2

Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης με κατασκευή συνάρτησης που περιγράφει ένα φαινόμενο ή μία κατάσταση, όπως για παράδειγμα οι ασκήσεις 5 της Α΄ ομάδας και 2, 3 και 4 της Β΄ ομάδας.

Η διδασκαλία της παραγράφου αυτής είναι μία ευκαιρία ανάκλησης/συμπλήρωσης προηγούμενων γνώσεων από οικείες συναρτήσεις (τριγωνομετρικές πολυωνυμικές, εκθετικές, λογαριθμικές, κ.α.) και των αντίστοιχων εξισώσεων και ανισώσεων. Επιπλέον, γεωμετρικές έννοιες και σχέσεις είναι χρήσιμο να συζητούνται με αφορμή σχετικά προβλήματα.

Η έννοια της συνάρτησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη γραφική της παράσταση και η σύνδεση αυτή πρέπει να αναδεικνύεται σε κάθε ευκαιρία, διότι υποστηρίζει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν. Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x+|x|$ και $g(x)=x-|x|$ των οποίων συνιστάται να γίνει και η γραφική παράσταση.

Επίσης, να επισημανθεί ότι από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι αν $x_1, x_2 \in D_f$ και $x_1 = x_2$ ισχύει πάντα $f(x_1)=f(x_2)$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα (ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, όπως θα φανεί σε επόμενη παράγραφο).

Επιπλέον, είναι χρήσιμο να συζητηθεί ότι ο ορισμός της ισότητας συναρτήσεων δεν μπορεί να υποκατασταθεί με τον «Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο». Καταρχάς, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις τύπο. Αλλά δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο μπορεί να είναι ίσες, όπως για παράδειγμα οι ορισμένες στο ¡ συναρτήσεις $f(x)=1$ και $g(x)=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x$.

§1.3

Για την αναγνώριση των ιδιοτήτων της μονοτονίας και του «ένα προς ένα» μιας συνάρτησης είναι σημαντικό να αξιοποιηθούν οι γραφικές παραστάσεις. Για τον σκοπό αυτό μπορούν να αξιοποιηθούν οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων της προηγούμενης παραγράφου.

Να διευκρινιστεί στους/στις μαθητές/-ήτριες ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορούν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις :

> i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή : $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$.
> ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1>x_2$.

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη αυτών των προτάσεων:

i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει:

$$f(x_1)<f(x_2) \quad \text{και} \quad x_1 \geq x_2$$

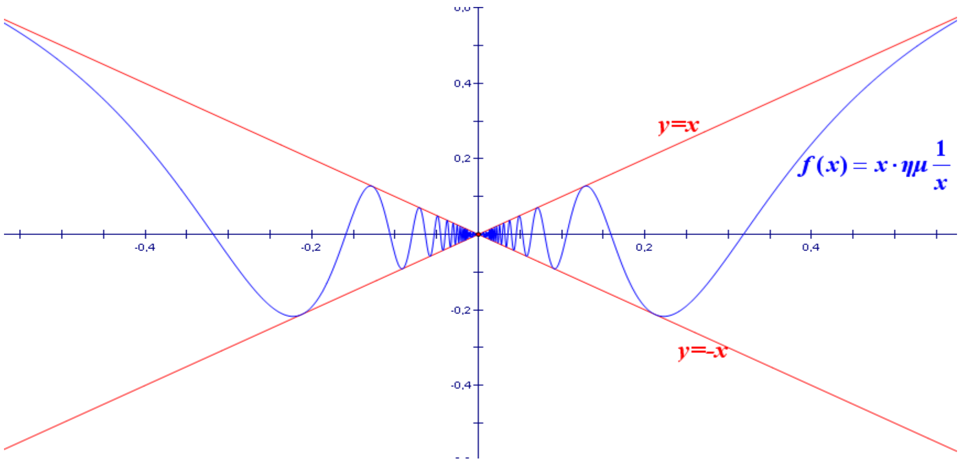
- Αν ήταν $x_1>x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1)>f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ήταν $x_1=x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε: $f(x_1)=f(x_2)$, που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

ii) Αντίστοιχη με την i.

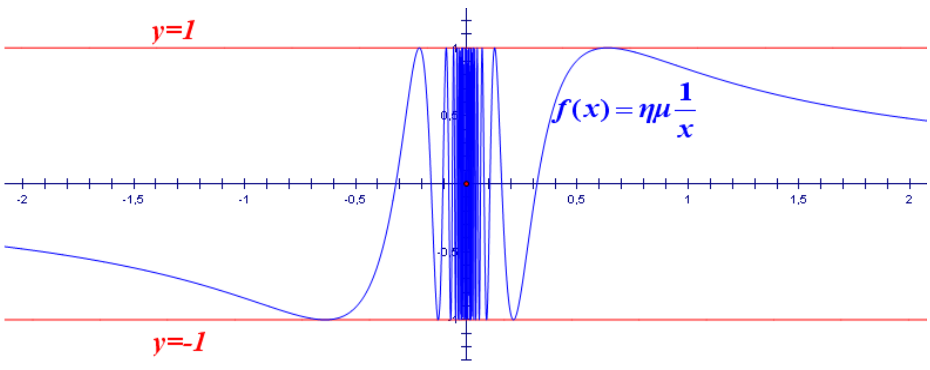
§1.4

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, χρειάζεται να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές/-ήτριες μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους/στις μαθητές/-ήτριες, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριο της όταν το x τείνει στο x_0, καθώς και ότι η τιμή του $\lim_{x \to x_0} f(x)$ καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0. Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το x τείνει στο x_0. Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών/-ητριών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0, δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0. Για τον σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Επίσης, επειδή πολλοί/-ές μαθητές/-ήτριες θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$ (Σχήμα 2).



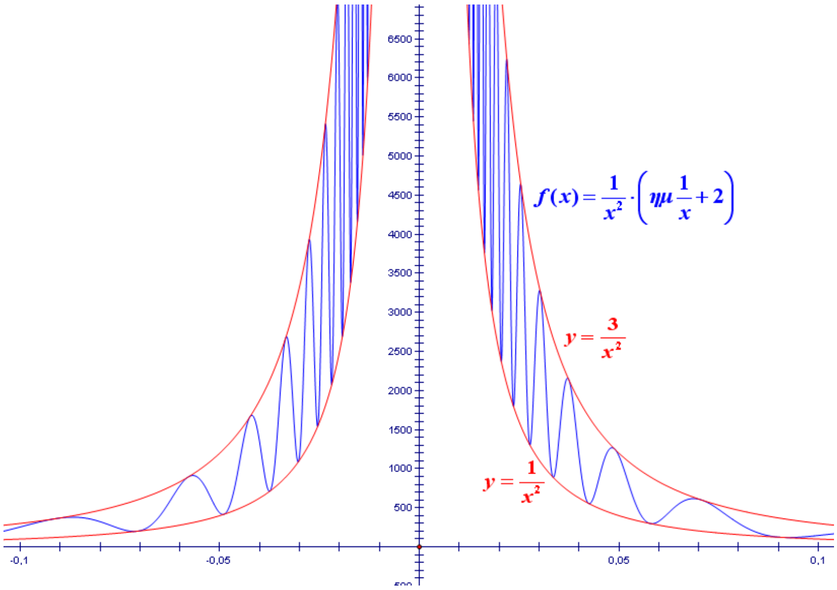
Σχήμα 2

§1.5

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές/-ήτριες υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους/τις μαθητές/-ήτριες να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους/τις μαθητές/-ήτριες της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα, σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ » (άσκηση 3i, Α΄ ομάδας) είναι χρήσιμο να ζητείται από τους/τις μαθητές/-ήτριες να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ και $g(x)=\dfrac{(x^2+4)\cdot(x+2)}{x^2+2x+4}$ είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης, σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 της Α΄ Ομάδας, να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές/-ήτριες κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο x_0 και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το x_0 να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο x_0 πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

§1.6

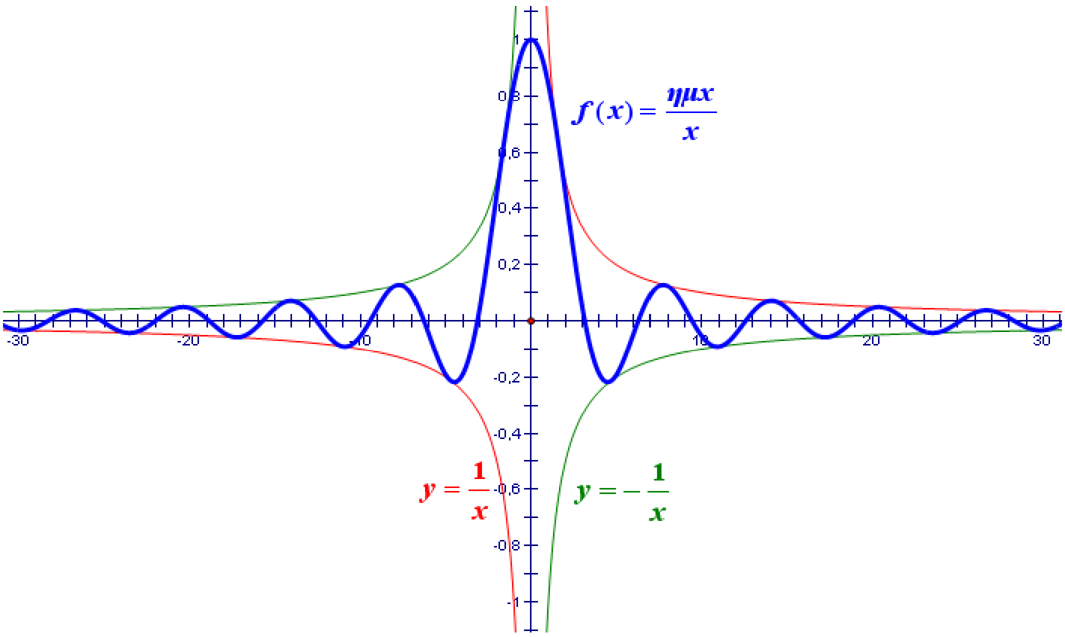
Προτείνεται να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\eta\mu\dfrac{1}{x}+2\right)$ (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

§1.7

Προτείνεται να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το x τείνει στο +∞, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το x τείνει στο +∞, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu x$.



Σχήμα 4

Τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}}$ να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές/-ήτριες ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Να δοθεί στους/στις μαθητές/-ήτριες η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο :

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

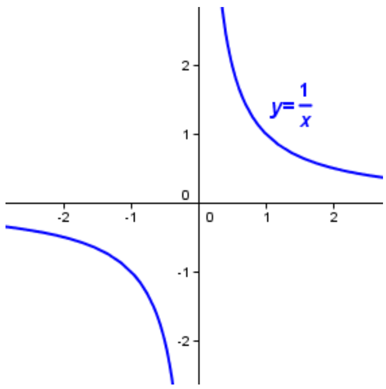
β) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

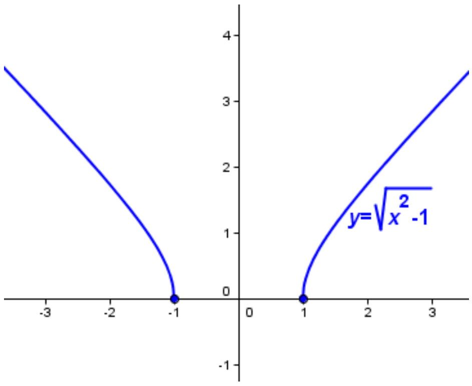
Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με την βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων

§1.8

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) είναι σημαντικό να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ (Σχήμα 5) και $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (Σχήμα 6). Να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους/στις μαθητές/-ήτριες και σχετικές ασκήσεις.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές/-ήτριες να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντούν οι μαθητές/-ήτριες στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών. Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το ανοιχτό διάστημα (α, β), τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

Να τονιστεί στους/στις μαθητές/-ήτριες ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορεί να χρησιμοποιείται, αναπόδεικτα, η πρόταση:

> Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός y είναι τιμή της f. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. Είναι $\lim\limits_{x \to \sigma_1} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to \sigma_2} g(x) = +\infty$. Επομένως θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$. Θα είναι $x_1 \neq x_2$ και από το θεώρημα του Bolzano η g θα έχει μια ρίζα x_0 στο ανοικτό διάστημα με άκρα x_1, x_2. Θα είναι $g(x_0) = 0$ και επομένως $f(x_0) = y$ δηλαδή ο y θα είναι τιμή της f.

Κεφάλαιο 2ο

§2.1

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον/τη μαθητή/-ήτρια να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους/στις μαθητές/-ήτριες γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x \le 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$

στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

§2.2

Χρειάζεται να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους/τις μαθητές/-ήτριες των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

§2.3

Χρειάζεται να δοθεί βάρος στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση σχετικά με το ότι το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.

Στην λυμένη εφαρμογή 2, να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους/στις μαθητές/-ήτριες η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνώρισαν στη γεωμετρία.

§2.4

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για τον λόγο αυτό είναι σημαντικό οι μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν την έννοια μέσα από ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

§2.5

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών.

Στην λυμένη εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση για το τι εκφράζει το πηλίκο $\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5}$ (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές/-ήτριες ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές/-ήτριες το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

§2.6

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του προσήμου του λόγου μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν θετική κλίση.

ii) γνησίως φθίνουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της μονοτονίας χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

§2.7

Τα προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων αποτελούν μία από τις σημαντικές εφαρμογές του διαφορικού λογισμού που δικαιολογούν και αποδίδουν αξία στη διδασκαλία του. Συγχρόνως, συγκεντρώνουν στοιχεία από τη διδασκαλία προηγούμενων ενοτήτων και έτσι αποτελούν μια καλή ευκαιρία επαναλήψεων και συμπληρώσεων. Κρίνεται σκόπιμο να συζητηθούν κατά το δυνατόν περισσότερα προβλήματα.

Μετά την εφαρμογή 2 να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 i) α) της Β΄ Ομάδας. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο: Για κάθε x είναι $e^x \geq x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Απόδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει $\ln x \leq x-1$ και το «=» ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \leq e^x-1$ και το «=» ισχύει μόνο για $e^x=1$ δηλαδή $x=0$. Επομένως $x \leq e^x-1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα $e^x \geq x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

§2.8

Υπενθυμίζεται ότι θα μελετηθούν μόνο συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους. Για τον λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν οι ασκήσεις 3iv και 3v της Α΄ ομάδας.

§2.9

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους/στις μαθητές/-ήτριες να υπολογίσουν το $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}$, το οποίο είναι της μορφής «$\frac{0}{0}$». Οι μαθητές/-ήτριες θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ</u>

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στο κοινό τους σημείο *Α(1,0)* είναι οι ευθείες $\varepsilon: y=x-1$ και $\zeta: y=-2x+2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ *<u>προσεγγίζονται</u>* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $\varepsilon: y=x-1$ και $\zeta: y=-2x+2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο $x_0=1$ η τιμή του πηλίκου $\frac{\ln x}{1-x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\frac{x-1}{-2x+2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1-x^2} \simeq \frac{x-1}{-2x+2}=\frac{x-1}{-2(x-1)}=\frac{1}{-2}$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

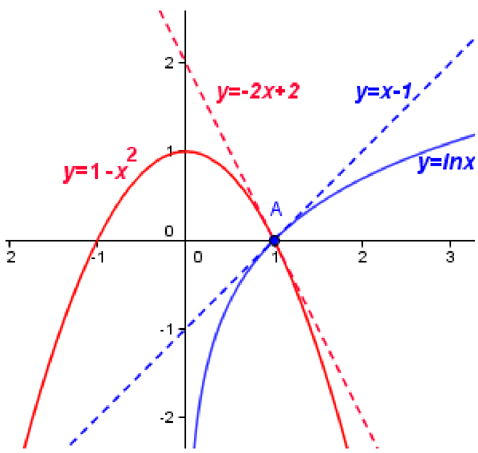
Επομένως, «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f'(1)}{g'(1)}$, το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

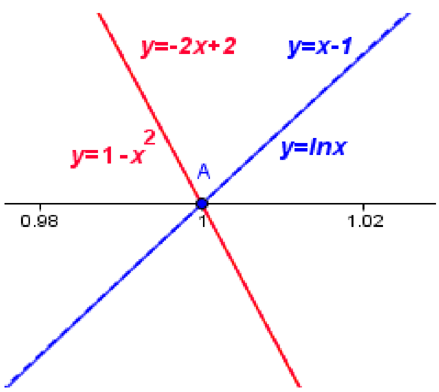
Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 - x^2$ *<u>προσεγγίζονται</u>* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y = \ln x$, $y = 1 - x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).

- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο $A(1,0)$. Θα παρατηρήσουμε ότι η $y = \ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y = x - 1$, ενώ η $y = 1 - x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y = -2x + 2$ (σχήμα 8).



<u>Σχήμα 7</u>



<u>Σχήμα 8</u>

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι κανόνες De l' Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι, αν έχουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ και επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)''}{(x)''}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο. Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$

Επίσης, να τονιστεί ότι ενδέχεται μια συνάρτηση να τέμνει μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτή της. Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί (ευκταίο να δοθεί και το γράφημα) η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu\dfrac{1}{x}$ που έχει ασύμπτωτη την $y=x$ η οποία τέμνει την γραφική παράσταση σε άπειρα σημεία.

§2.10

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι μια περιεκτική μορφή αναπαράστασης που παρέχει πληροφορίες για τη συνάρτηση με άμεσο και εύληπτο τρόπο. Συγχρόνως η διαδικασία μελέτης και χάραξής της βοηθάει στην εμπέδωση και ενοποίηση προηγούμενων γνώσεων. Στην περίπτωση που η συνάρτηση εκφράζει ένα φαινόμενο, η γραφική παράστασή της προσφέρει επιπλέον κατανόηση του φαινομένου. Για τον λόγο αυτό προτείνεται η χάραξη της γραφικής παράστασης συναρτήσεων που μελετήθηκαν σε προβλήματα προηγούμενων παραγράφων (π.χ. στην 2.7).

Κεφάλαιο 3ο

§3.1

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Α/Α	**Συνάρτηση**	**Παράγουσες**
1	$f(x)=0$	$G(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
7	$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^{2}x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^{x}$	$G(x)=e^{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=\alpha^{x}$	$G(x)=\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}+c,\ c\in\mathbb{R}$

<u>Σημείωση</u>:
Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε <u>διάστημα</u> στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της παραγράφου μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:
i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και
ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων.

§3.4

Το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου χρειάζεται να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση – υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια είναι σημαντικό να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Προτείνεται να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

Να δοθεί στους/στις μαθητές/-ήτριες η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.
- Αν, <u>επιπλέον</u>, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ »

§3.5

Η εισαγωγή της συνάρτησης $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για τον λόγο αυτό <u>δεν θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις</u> που αναφέρονται στη συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ και γενικότερα στη συνάρτηση $\int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt$.

§3.7

Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου μπορεί να χρειαστεί να συζητηθούν έννοιες και διαδικασίες από τις προηγούμενες τάξεις, όπως επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, συστημάτων, γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.

<u>Γενικές Παρατηρήσεις:</u>

Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.

Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.

Εξαιρούνται από την ύλη: α) οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10 και β) οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2023–2024

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ τάξης Ημερησίου, Μουσικού, Καλλιτεχνικού, Εκκλησιαστικού Γενικού Λυκείου

Το μάθημα των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας της Γ΄ τάξης περιλαμβάνει τα Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική - Πιθανότητες). Η διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών έχει ως στόχους αφενός τη γνωριμία των μαθητών/μαθητριών με στοιχεία απαραίτητα για την κατανόηση και την ερμηνεία καταστάσεων που συναντά ο σύγχρονος πολίτης, και αφετέρου την εμπλοκή τους με μη αιτιοκρατικούς τρόπους σκέψης για προβλήματα και καταστάσεις που εμπεριέχουν κάποιο βαθμό αβεβαιότητας. Το Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος έχει δημοσιευθεί στο ΦΕΚ 3027/τ.Β/21-7-2020 και η διδακτέα ύλη περιλαμβάνει όλα τα κεφάλαια.

Είναι επιθυμητό η διδασκαλία του μαθήματος να γίνεται με την εμπλοκή των μαθητών/μαθητριών σε έργα και προβλήματα μέσα στην τάξη, είτε σε ομάδες εργασίας, είτε ατομικά, είτε με συζήτηση σε όλη την τάξη. Με στόχο τον περιορισμό του φόρτου εργασίας των μαθητών/μαθητριών εκτός τάξης, οι εργασίες για το σπίτι θα πρέπει να εστιάζουν στο περιεχόμενο και στους στόχους τους μαθήματος. Μια τέτοια προσέγγιση δίνει περισσότερες ευκαιρίες σε όλους τους/τις μαθητές/μαθήτριες να εμπλακούν λύνοντας προβλήματα και συζητώντας καταστάσεις και φαινόμενα. Το περιεχόμενο και η δομή του σχολικού βιβλίου υποστηρίζει μια τέτοια προσέγγιση της διδασκαλίας.

Τα προβλήματα και ερωτήματα που τίθενται στη "Διερεύνηση" προτείνεται να χρησιμοποιούνται για να εισαχθούν οι "Βασικές έννοιες – Ιδέες – Διεργασίες" μέσα από τις δραστηριότητες των μαθητών/μαθητριών στην τάξη. Τα προβλήματα της "Διερεύνησης" έχουν διαμορφωθεί για τη συζήτηση στην τάξη, με τον/την εκπαιδευτικό να αναλαμβάνει περισσότερο να διευκολύνει τη συζήτηση παρά να "παραδώσει τη νέα θεωρία". Παρόλα αυτά σε κάποιες περιπτώσεις απαιτείται ο/η εκπαιδευτικός να αναλάβει περισσότερο καθοδηγητικό ρόλο (πχ. για να περιγράψει το θηκόγραμμα στην παράγραφο 2.3).

Οι ασκήσεις που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο προτείνεται να αποτελέσουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη. Το "Πρόσθετο Υλικό" μπορεί να αξιοποιηθεί είτε ως επιπλέον ασκήσεις, είτε για την εκπόνηση κάποιας συλλογικής εργασίας. Σε κάποιες περιπτώσεις, στο Πρόσθετο Υλικό συμπεριλαμβάνονται ασκήσεις και υλικό που υπάρχει σε άλλα σχολικά βιβλία που μπορούν να βρεθούν και στο ψηφιακό σχολείο (http://ebooks.edu.gr/new/allcourses.php).

Επειδή δίνεται έμφαση στην κατανόηση, στην αξιοποίηση των εργαλείων της στατιστικής και των πιθανοτήτων και στην κριτική ερμηνεία των πιθανών συμπερασμάτων, η απομνημόνευση τύπων δεν είναι στόχος του μαθήματος. Έτσι, <u>στο τέλος των οδηγιών παρέχεται ένα τυπολόγιο το οποίο θα δίνεται στους/στις μαθητές/μαθήτριες κατά την γραπτή εξέτασή τους.</u>

Κεφάλαιο 1. Πιθανότητες (προτείνεται να διατεθούν 15 ώρες)

§ 1.1 Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα (προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες)

Η αβεβαιότητα που είναι εγγενής στα πειράματα τύχης, σε αντίθεση με τα αιτιοκρατικά πειράματα, είναι μια σημαντική και νέα ιδέα για τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Από την καθημερινή ζωή και από παιχνίδια που η έκβασή τους είναι αβέβαιη, οι μαθητές/μαθήτριες αναμένεται να έχουν εμπειρίες που θα τους επιτρέψουν να έχουν μια διαισθητική προσέγγιση του μη αιτιοκρατικού πειράματος και της έννοιας της πιθανότητας. Η μετατροπή αυτών των διαισθητικών προσεγγίσεων σε μαθηματικές έννοιες και σχέσεις απαιτεί τη διερεύνηση των βασικών εννοιών και πράξεων των ενδεχομένων (ως συνόλων). Η υποστήριξη με παραδείγματα και με διαγράμματα Venn μπορεί να συμβάλλει στη σύνδεση των εννοιών με τη διαίσθηση. Εργαλεία, όπως το δενδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου, βοηθούν στη μοντελοποίηση ενός πειράματος τύχης και στην κατασκευή του δειγματικού χώρου. Σημαντική για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων είναι, επίσης, η μετάφραση των ενδεχομένων και των μεταξύ τους σχέσεων από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.

§ 1.2 Πιθανότητες: Ορισμοί και Εφαρμογές (προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες)

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας προτείνεται να είναι η κατάληξη μιας διαισθητικής προσέγγισης του μέτρου βεβαιότητας για ενδεχόμενα που είναι ισοπίθανα. Οι μαθητές/μαθήτριες, από την καθημερινή τους εμπειρία, αναμένεται να μπορούν να απαντήσουν πόσο πιθανό είναι να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα όταν ρίχνουμε ένα ζάρι ή όταν "στρίβουμε" ένα κέρμα. Αυτή η εμπειρία μπορεί να αξιοποιηθεί για να οδηγηθούν στον κλασικό ορισμό και στις άμεσες συνέπειές του. Ο αξιωματικός ορισμός είναι πιο αφηρημένος και γενικός και αναφέρεται και στην περίπτωση που τα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Η ανάγκη ύπαρξης του αξιωματικού ορισμού μπορεί να προκύψει από πειράματα τύχης στα οποία τα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, όπως το "Παιχνίδι 3" της "Διερεύνησης" του βιβλίου, και από την ανάγκη μοντελοποίησης πολύπλοκων φαινομένων ως πειραμάτων τύχης. Σε αυτά αναδεικνύεται η ανάγκη να αποδοθεί πιθανότητα σε ενδεχόμενα, ώστε να απαντώνται ερωτήματα όπως «τι αναμένουμε ως πιθανότερο να συμβεί και πόσο;». Η σύγκριση και η συσχέτιση του κλασικού με τον αξιωματικό ορισμό είναι σημαντικό να γίνει, αναδεικνύοντας το διαφορετικό πλαίσιο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί ο καθένας (περιπτώσεις ισοπίθανων και μη ισοπίθανων ενδεχομένων).

§ 1.3 Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα (προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες)

Οι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων εισάγονται για πρώτη φορά και είναι σημαντικό να συνδέονται με τη διαίσθηση των μαθητών/μαθητριών αφενός μέσα από οικείες καταστάσεις και προβλήματα (όπως εκείνο της "Διερεύνησης") και αφετέρου μέσω των διαγραμμάτων Venn. Ο αποδείξεις συνδέουν ορισμούς και νόμους σε μια συνεκτική δομή. Οι ασκήσεις μπορούν να αναδεικνύουν την αξία των κανόνων, εφόσον περιγράφουν προβλήματα και καταστάσεις που προέρχονται από την καθημερινή ζωή και εμπειρία και από άλλες επιστήμες. Έτσι, δεν προτείνονται ασκήσεις που απαιτούν πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς χωρίς νόημα για τη λύση και τη διερεύνηση προβλημάτων.

§ 1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)

Στα στοιχεία Συνδυαστικής αναφέρονται οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων στα οποία τίθεται το ερώτημα "πόσα " ή με "πόσους τρόπους" και η απάντηση δεν μπορεί να δοθεί εύκολα με καταμέτρηση. Το σημαντικότερο εργαλείο για τη λύση των προβλημάτων είναι η βασική αρχή απαρίθμησης, της οποίας άμεση εφαρμογή είναι ο υπολογισμός του πλήθους των συνδυασμών, των διατάξεων και των μεταθέσεων. Για αυτό είναι σημαντικό οι μαθητές/μαθήτριες να γνωρίζουν πώς αυτοί τύποι προκύπτουν από τη βασική αρχή απαρίθμησης, χωρίς να είναι απαραίτητη η απομνημόνευσή τους.

Κεφάλαιο 2. Στατιστική (προτείνεται να διατεθούν 32 ώρες)

§ 2.1 Πληθυσμός - Δείγμα - Μεταβλητές (προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες)

Η διδασκαλία της παραγράφου έχει ως στόχο την εισαγωγή των βασικών εννοιών της Στατιστικής ως επιστήμης που ασχολείται με τη συλλογή δεδομένων, την παρουσίασή τους και την ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων. Η ύπαρξη μεγάλου όγκου δεδομένων και η αβεβαιότητα είναι δύο σημαντικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων και των ερευνών της Στατιστικής.

Μέσα από παραδείγματα οι μαθητές/μαθήτριες αναμένεται να κατανοήσουν τη διάκριση μεταξύ πληθυσμού (απογραφή) και δείγματος (δειγματοληψία), μεταξύ μεταβλητής και τιμών της, μεταξύ ποιοτικής και ποσοτικής μεταβλητής, κ.λπ..

Ιδιαίτερα σε σχέση με την περίπτωση της δειγματοληψίας, συζητώντας ιστορικά παραδείγματα, θα πρέπει να επισημανθεί ότι το τυχαίο και αντιπροσωπευτικό δείγμα παίζει σημαντικό ρόλο στην ποιότητα της έρευνας και την άντληση συμπερασμάτων.

§ 2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων (προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες)

Οι μαθητές/μαθήτριες θα πρέπει να μπορούν να κατασκευάζουν πίνακες συχνοτήτων και διαγράμματα, να μπορούν να τα "διαβάζουν" (όταν αυτά δίνονται) και να μπορούν να "μεταφράζουν" πίνακες σε διαγράμματα (ή κάποια μορφή διαγράμματος σε άλλη) και αντιστρόφως. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων (π.χ. λογιστικό φύλλο) μπορεί να υποστηρίξει αυτή τη μετάφραση και γενικότερα την κατανόηση των στατιστικών εννοιών. Είναι σημαντικό οι μαθητές/μαθήτριες να διαπραγματευθούν δεδομένα με διαφορετικά χαρακτηριστικά: τιμές ποσοτικής αλλά

και ποιοτικής μεταβλητής, μικρά αλλά και μεγάλα σύνολα δεδομένων, δεδομένα που χρειάζεται να ομαδοποιηθούν κλπ. Για λόγους συντομίας κατά την εργασία των μαθητών/μαθητριών στην τάξη, θα μπορούσαν να χρησιμοποιούνται αριθμομηχανές ή/και φωτοτυπίες.
Μία επιπλέον επιδίωξη είναι η καλλιέργεια της κριτικής ικανότητας των μαθητών/μαθητριών για τον κίνδυνο παρερμηνείας που υπάρχει από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος αλλά και από παραπλανητικούς τρόπους παρουσίασης στατιστικών δεδομένων.
Στην περίπτωση ομαδοποιημένων παρατηρήσεων ο αριθμός των κλάσεων θα πρέπει να δίνεται στους/στις μαθητές/μαθήτριες.

§ 2.3 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, θηκόγραμμα, συντελεστής μεταβλητότητας (προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες)

Η διδασκαλία της παραγράφου εστιάζει στις έννοιες των συγκεκριμένων μέτρων θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή) και διασποράς (εύρος, ενδοτεταρτημοριακό εύρος, διακύμανση και τυπική απόκλιση). Χρειάζεται να γίνει συζήτηση για την επιλογή του μέτρου θέσης και του μέτρου διασποράς με τα οποία θα παρουσιαστούν συνοπτικά κάποια δεδομένα. Διαφορετικά μέτρα έχουν διαφορετικά πλεονεκτήματα. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα μέτρα θέσης, κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα της μέσης τιμής είναι ότι για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές και ότι έχει μεγάλη εφαρμογή σε περαιτέρω στατιστική ανάλυση. Πλεονεκτήματα της διαμέσου είναι ότι δεν επηρεάζεται από το μέγεθος των ακραίων τιμών και ότι ο υπολογισμός της είναι απλός. Ενώ για την επικρατούσα τιμή ένα σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι εφαρμόζεται και σε ποιοτικά δεδομένα.
Η σύγκριση δύο ομάδων δεδομένων μπορεί να στηρίζεται στα μέτρα θέσης και διασποράς, αλλά χρειάζεται κάθε φορά να λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο των δεδομένων, από τα οποία προέκυψαν τα μέτρα. Για παράδειγμα, μέτρα θέσης και διασποράς για δεδομένα βαθμών που βρίσκονται στην κλίμακα 0 – 20 αναμένεται να είναι διαφορετικά από τα αντίστοιχα μέτρα για δεδομένα βαθμών στην κλίμακα 0 – 100, ακόμα κι αν τα δεδομένα είναι τα ίδια και έχει γίνει αναγωγή από τη μία κλίμακα στην άλλη.
Το θηκόγραμμα είναι μια μορφή αναπαράστασης των δεδομένων που εμπεριέχει τα περισσότερα από τα μέτρα θέσης και διασποράς και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται ευρέως στην παρουσίαση δεδομένων αλλά και στη σύγκριση διαφορετικών ομάδων δεδομένων. Η κατασκευή και η ερμηνεία θηκογραμμάτων είναι σημαντικά στοιχεία της διδασκαλίας της ενότητας.
Δίνοντας έμφαση στις έννοιες των μέτρων θέσης και διασποράς προτείνεται να μην ζητείται από τους/τις μαθητές/μαθήτριες η απομνημόνευση τύπων αλλά η επιλογή κατάλληλων μέτρων, η ερμηνεία και η κριτική προσέγγιση ερμηνειών.

Τέλος, μέσω διαφορετικών δειγμάτων του ίδιου πληθυσμού είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ του δειγματικού μέσου και του μέσου του πληθυσμού. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι τον μέσο ενός δείγματος μπορούμε να τον υπολογίσουμε ενώ τον μέσο του πληθυσμού μπορούμε, μέσω του δείγματος, μόνο να τον εκτιμήσουμε. Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη δειγματική ποσότητα σε σχέση με την αντίστοιχη πληθυσμιακή (π.χ. τυπική απόκλιση).

§ 2.4 Κανονική κατανομή και εφαρμογές (προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες)
Με την κανονική κατανομή μοντελοποιούνται διαδικασίες και φαινόμενα, αρκετά από τα οποία επηρεάζουν την καθημερινότητα του πολίτη. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι με αυτό το μοντέλο μπορούμε να περιγράψουμε πώς κατανέμονται σε έναν ιδεατό, άπειρο πληθυσμό οι τιμές ορισμένων μεταβλητών. Στην πράξη, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή για να αντλούμε συμπεράσματα με κάποιο βαθμό βεβαιότητας για μεγάλα δείγματα (για παράδειγμα, ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ-σ , μ+σ)» ισούται κατά προσέγγιση με 0,68 ή 68%).

§ 2.5 Πίνακες συνάφειας και ραβδογράμματα (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)
Η πιθανή σύνδεση δύο ποιοτικών χαρακτηριστικών μελετάται με χρήση των πινάκων συνάφειας. Η ερμηνεία των πινάκων συνάφειας και των σχέσεων των δύο χαρακτηριστικών δεν μπορεί από μόνη της να οδηγεί σε σχέση αιτίου – αιτιατού, αν και μια τέτοια σχέση μπορεί να υπάρχει σε κάποιες περιπτώσεις. Τόσο τα ομαδοποιημένα, όσο και τα στοιβαγμένα ραβδογράμματα μπορούν να αξιοποιηθούν στην ανάδειξη και ερμηνεία συνδέσεων μεταξύ των χαρακτηριστικών.

§ 2.6 Σύγκριση ποσοτικών χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)
Τα ποσοτικά χαρακτηριστικά που συνδέονται είτε με δύο δείγματα (πχ. εφαρμογή 1), είτε με δύο κατηγορικές μεταβλητές (πχ. εφαρμογή 3) μπορούν να μελετηθούν αξιοποιώντας τα αντίστοιχα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και σχετικές αναπαραστάσεις (θηκογράμματα, άλλα γραφήματα, πίνακες). Σε κάθε περίπτωση, η έμφαση είναι στις ερμηνείες και στις συνδέσεις, οι οποίες και εδώ δεν εκφράζουν πάντα σχέσεις αιτίου – ατιατού.

§ 2.7 Γραμμική συσχέτιση ποσοτικών μεταβλητών και διαγράμματα διασποράς (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)
Σε αρκετές περιπτώσεις, η συσχέτιση δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών μπορεί να μελετηθεί μέσα από ένα διάγραμμα διασποράς. Η μελέτη που γίνεται σε αυτή την ενότητα αναφέρεται μόνο σε πιθανή γραμμική συσχέτιση. Η μη ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης δεν σημαίνει ανυπαρξία συσχέτισης γενικώς (π.χ. θα μπορούσε να υπάρχει εκθετική ή τετραγωνική συσχέτιση).

Η γραμμική συσχέτιση μπορεί να φαίνεται από το διάγραμμα διασποράς, ή από τον συντελεστή Pearson. Ο τύπος για τον συντελεστή Pearson δίνεται για λόγους πληρότητας και δεν ζητείται η απομνημόνευσή του από τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Η τιμή του συντελεστή r μπορεί να δίνεται έτοιμη, ή να υπολογίζεται μέσω λογισμικού, ή, σε κάποιες περιπτώσεις, ακόμη και να υπολογίζεται με χρήση αριθμομηχανής. Είναι σημαντική η σύνδεση της τιμής του r με τη μορφή του διαγράμματος διασποράς και η ανάπτυξη της ικανότητας οι μαθητές να κάνουν τέτοιες ερμηνείες.

Και πάλι, κρίνεται απαραίτητο να μην ερμηνευθεί η ύπαρξη συσχέτισης με όρους αιτίου – αιτιατού, εφόσον μπορεί να υπάρχει κάποιος τρίτος (συγχυτικός) παράγοντας.

Εφόσον φαίνεται να υπάρχει γραμμική συσχέτιση, είναι πιθανώς ενδιαφέρουσα η δημιουργία μιας ευθείας που μοντελοποιεί αυτή τη συσχέτιση. Αυτό συνδέεται κυρίως με την πραγματοποίηση προβλέψεων, οι οποίες μπορεί να γίνουν κάτω από κάποιες προϋποθέσεις. Οι στόχοι του παρόντος μαθήματος περιορίζουν τα μοντέλα γραμμικής συσχέτισης μόνο στην ευθεία που κατασκευάζεται με το μάτι και όχι σε περισσότερο πολύπλοκα.

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου

Οι οδηγίες διδασκαλίας για τα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης του Εσπερινού Γενικού Λυκείου ταυτίζονται με εκείνες για του Ημερησίου, με την απαραίτητη τροποποίηση των διατιθέμενων ωρών διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, οι ενδεικτικές ώρες διδασκαλίας κάθε παραγράφου προσαρμόζονται περίπου στο μισό των αντίστοιχων του Ημερήσιου Γενικού Λυκείου. Για αυτόν τον σκοπό, η διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζει στη συζήτηση των βασικών προβλημάτων (Διερεύνηση) και της θεωρίας. Αν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος, ο/η διδάσκων/διδάσκουσα θα επιλέξει τις επιπλέον εφαρμογές και ασκήσεις που θα συζητηθούν στην τάξη με κριτήριο τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών/μαθητριών.

ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

(δίνεται στους/στις μαθητές/μαθήτριες κατά τη γραπτή εξέταση)

Πιθανότητες:

— $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$, $0\leq P(A)\leq 1$,

— Αν $A\cap B=\varnothing$, τότε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων:

$P(A')=1-P(A)$,

$P(A)=P(A\cap B)+P(A-B)$,

Αν $B\subseteq A$ τότε $P(B)\leq P(A)$,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

— Συνδυαστική:

Διατάξεις των ν ανά κ με επαναλήψεις: ν^{κ}

Διατάξεις των ν ανά κ χωρίς επαναλήψεις: $(\nu)_{\kappa}=\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-\kappa+1)=\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$

Μεταθέσεις των ν στοιχείων : $\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=\nu!$

Συνδυασμοί των ν ανά κ: $\dbinom{\nu}{\kappa}=\dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

Στατιστική:

— Μέση τιμή $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+t_3+\cdots+t_\nu}{\nu}$ ή $\bar{x}=\dfrac{x_1\cdot\nu_1+x_2\cdot\nu_2+\cdots+x_\kappa\cdot\nu_\kappa}{\nu}$

— Ενδοτεταρτημοριακό εύρος: $Q=Q_3-Q_1$

— Ακραίες οι τιμές που βρίσκονται έξω από το διάστημα $[Q_1-1,5\cdot Q\ ,\ Q_3+1,5\cdot Q]$

— Διακύμανση: $s^2=\dfrac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+(t_3-\bar{x})^2+\cdots+(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$

ή $s^2=\dfrac{(x_1-\bar{x})^2\cdot\nu_1+(x_2-\bar{x})^2\cdot\nu_2+\cdots+(x_\kappa-\bar{x})^2\cdot\nu_\kappa}{\nu}$

— Τυπική απόκλιση $s=\sqrt{s^2}$

— Συντελεστής μεταβλητότητας $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}$

— Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ (του πληθυσμού):

στο διάστημα	εκτιμούμε ότι βρίσκεται περίπου το
$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$	68% των ατόμων του πληθυσμού
$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$	95% των ατόμων του πληθυσμού
$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$	99,7% των ατόμων του πληθυσμού

— Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης Pearson: $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu \bar{x}\,\bar{y}}{\nu s_X s_Y}$